ドップラー効果とホワイトノイズの関係性及びその周辺

小野田　智之
廣國　善紀

2014 年 11 月 28 日

概要

あまり言及されていないことだが，音源がホワイトノイズである場合，ドップラー効果を検出することができない．この理由はホワイトノイズの各々の振動数は，確かにドップラー効果を受けてシフトするのだが，見かけ上，ホワイトノイズ分布が変化しないためである．本稿では単振動のドップラー効果を，ある振動数分布を持った音源にまで考察の対象を広げる．また，経験上，ドップラー効果による振動数変化は連続であるが，これに対応する微分式が存在しない．このようなことを踏まえ，ドップラー 効果を再検討し，その拡張を試み，ホワイトノイズの新しい解釈の道を探る．

1　ドップラー効果再考

1.1　ホワイトノイズとドップラー効果の定義ついて

単振動のドップラー効果を，ある振動数分布を持った音源にまで広げて考えてみる．音源のパワースペクトル（振動数分布）がホワイトノイズである場合やパワースペクトルの形が並進対称の場合を考える．ただし，ここで言うパワースペクトルとは，振動数を Fourier 変換し，その絶対値を二乗したものである．従って, 並進対称なパワースペクトルとは，$|\mathcal{F}(f)(\xi+\eta)|^2 = |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2$ となるような分布である．

まずホワイトノイズについて定義を確認する．ホワイトノイズとは，不規則に上下に震動する波であり，通常可聴域のホワイトノイズをさすことが多い．Fourier 変換を行い，パワースペクトルにすると，全ての周波数で同じ強度となる．これは Wiener-Hintchine の定理から，自己相関関数がデルタ関数となることと同じである．統計学の言葉で言うと，定常独立であることを意味している．なお厳密には自己相関関数にデルタ関数といった無限を含むものは実在し得ないので，理想的なホワイトノイズは実在しない．数学的には以下のように定義される．

Definition 1 (ホワイトノイズ)**.** 以下の 2 つの条件を満たすような $w(t)$ をホワイトノイズと定義する

$$\mu = E[w(t)] = 0 \tag{1.1}$$

$$R(t_1, t_2) = E[w(t_1)w(t_2)] = \sigma^2\delta(t_1 - t_2) \tag{1.2}$$

ただし，σ^2 は w の分散で，δ は Dirac の δ 関数である．一つ目の式は平均ゼロを表し，二つ目の式は自己相関は σ^2 であり，相互関係はゼロであることを表している．

自己相関 (δ 関数) を Fourier 変換すると，ホワイトノイズのパワースペクトルが得られる．

$$|W(\omega)|^2 = \sigma^2 \tag{1.3}$$

パワースペクトルの値は ω に依存しないので，全ての周波数で一定の値になっている．

次にドップラー効果とは，波の発生源（音源，光源など）と観測者との相対的な速度の存在によって，波の周波数が異なって観測される現象を言う．発生源が近づく場合には波の振動が詰められて周波数が高くなり，逆に遠ざかる場合には振動が伸ばされて低くなる．

Definition 2. 観測者も音源も同値う直線上を動き，音源 $S(Source)$ から観測者 $O(Observer)$ に向かう向きを制とすると，観測者に聞こえる音波の振動数は,

$$f' = f \times \frac{V - v_o}{V - v_s} \tag{1.4}$$

となる．ここで，f は音源の出す音波の振動数，V は同質媒質中の音速，v_o は観測者の動く速度，v_s は音源の動く速度である．

1.2 ホワイトノイズ及びドップラー効果による変化について

以上を踏まえて，ホワイトノイズは見かけ上，ドップラー効果の影響を受けないことを議論する．音源が単振動 f の場合，ドップラー効果により，(1.4) 式で表される振動数 f' となる．ここでパワースペクトルを考える．この時，全ての振動数成分が音源と観測者の相対速度によって，パワースペクトルがシフトしたものと見なすことができる．また，この議論は和音の場合に対しても同様である．以上をまとめ，ホワイトノイズに対して適用すると，次のような命題を考えることができる．

Proposition 1. 観測者と相対的に等速直進運動する音源がホワイトノイズである場合，全ての観測点においてドップラー効果の影響を観測することが出来ない．ここで観測点とは音源と観測者の相対位置のことをさす．

Proof. ある単一の振動数が音源であり，観測者も音源も同一直線状を動き，音源 S から観測者 O に向かう向きを正とすると，観測者に聞こえる音波の振動数は，(1.4) 式となる．パワースペクトルが任意の音源の場合，各振動数成分は (1.4) 式により任意に平行移動した分布になる．この場合，ドップラー効果の影響は単振動の場合と同じく，観測される．定義より，ホワイトノイズのパワースペクトルは全ての振動数に対して同じ強度を持ち，この場合も (1.4) 式により，各振動数は平行移動することになり，分布の形が保存される．しかも，全ての振動数に対してその強度が等しいため，見かけ上，平行移動は検出されない（実際には各振動数がそれぞれシフトしている）．従って，ホワイトノイズ音源はドップラー効果によって見かけ上影響を受けないということが結論される． □

Proposition 2. 音源のパワースペクトルが並進対称である場合，見かけ上，ドップラー効果を検出することができない観測点が存在する．

Proof. 音源のパワースペクトルの周期を ω とする．すなわち，

$$|\mathcal{F}(f)(\xi+\omega)|^2 = |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 \tag{1.5}$$

となるような ω である．(1.4) 式より，f のドップラー効果により得られた振動数を f' とすれば，そのパワースペクトルは $|\mathcal{F}(f')(\xi)|^2$ となる．しかし，音源のパワースペクトルは並進対称であるから，ドップラー効果を考えたとき，任意の ξ に対して

$$|\mathcal{F}(f')(\xi)|^2 = |\mathcal{F}(f)(\xi+\omega)|^2 \tag{1.6}$$

とならなければならない．従って，

$$|\mathcal{F}(f')(\xi)|^2 - |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 = |\mathcal{F}(f)(\xi+\omega)|^2 - |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 = 0 \tag{1.7}$$

となるので，ドップラー効果により得られたパワースペクトルと，音源のパワースペクトルは一致する．以上により，(1.4) 式ではシフトが検出されず，見かけ上ドップラー効果が観測されない． □

従って，ドップラー効果が検出されるのは，$|\mathcal{F}(f')(\xi)|^2 - |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 \neq 0$ となり，シフトする時である．

2 終わりに

二つの命題を検討すれば，ホワイトノイズ，ドップラー効果，パワースペクトルの並進対称性などの間におもしろい関係があることに気がつく．これらの問題をより詳しく論じるために，(1.4) 式のドップラー効果の

式を微分式に拡張していくのが，今後の課題である．われわれの経験上においても，ドップラー効果による振動数の変化は連続であるのが自然である．